Bevezető analízis 1. gyakorlat 2018/19. I. félév
5. csoport, csütörtök 14-16

Első gyakorlat (szept.13.)

- Logikai bevezető feladat: Mely kártyákat kell megfordítani, hogy tudjuk, érvényesek-e? Miért? Más hasonló példák Mérő László Észjárások című könyvében
- Állításokhoz példák, indoklással.
  P: Minden x-hez van olyan $x < y$, amelyre $f(x) \leq y$
  Q: Van olyan y, hogy minden $x < y$ esetén $f(x) \leq y$
- Monotonitás definíciója, példák.
  Fontos: $f(x) = |x|$ nem monoton a számegyenesen. Adott I intervallumon van olyan függvény, amely monoton nő és monoton csökken, (a konstans függvény) de olyan nincs, amely szigorúan monoton növekvő és szigorúan monoton csökkenő is lenne.
- Az $f(x) = |x|$ függvény: monotonitás, minimuma nulla, maximuma nincs.
- Szélsőértékek definíciója, példák indoklással.
- Van-e olyan függvény, amely sehol nem vesz fel nullánál kisebb értéket, de nincs minimuma?
- 3.22-es feladat, $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ha } x \neq 0, \\ 3, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$
  Sem minimuma, sem maximuma nincs.
- Hasonlóan: $f(x) = \begin{cases} -|x|, & \text{ha } x \neq 0, \\ -5, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$
- **Házi feladat:** 1.12, 2.15, 3.13-3.16, 5.10, 5.16
- **Tanulni:** Jegyzet 3.1-3.5 szakaszok

Második gyakorlat (szept. 27.)

- Házi feladatok megbeszélése:
  - 1.12. Ha két állítás ugyanazt jelenti, akkor az egyikből következik a másik és a másikból az egyik, vagyis pontosan ugyanakkor teljesülnek. Itt ez nem állt fenn, mert tudtunk olyan esetet mondani, mikor az első teljesült, de a második nem.
  - 3.13-16. Próbáljunk minél egyszerűbb példákat hozni, mert a példáról meg kell mutatni, hogy miért teljesíti az adott tulajdonságot. (Ami gyakorlaton volt, arra lehet hivatkozni.) Ehhez kapcsolódó házi feladat: az $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ függvényről belátni, hogy jó példa a 3.15-ösre
  - 5.10, 5.16 Ha valami nem igaz, elég egyetlen ellenpéldát mutatni.
- A 2.15-öst megoldottuk kétféle módon: először 0-ra rendezve és a tört előjelét vizsgálva (számláló és nevező előjele alapján), másodszor pedig esetszétválasztással a nevező, vagy az $(x + 2)$ előjele szerint. Fontos, hogy egy ismeretlent tartalmazó kifejezéssel nem szabad csak úgy szorozni egy egyenlőtlenséget, az előjeleket mindig meg kell vizsgálni! A két esetben kapott megoldások uniója adja az egyenlőtlenség összes megoldását, vagy kötőszóval kapcsoljuk össze, mert mindkét eset külön-külön jó megoldás. Az ábra segít, de az nem megoldás, nem lehet arról leolvasni a metszéspontokat, azokat ki kell számolni.
- Abszolútértékes egyenlőtlenségek: 3.277, 3.279. Mit jelent az, hogy $|a| < 5$? $a < 5$ vagy $a > -5$. Itt az a helyén bármilyen kifejezés állhat, akkor is működik.
  Amikor esetekre bontunk, mindig ki kell írni, hogy milyen esetek vannak (pl: $x < 2$) és erre figyelni kell a megoldás megadásánál is. Erre (is) példaként megnéztük a 2.15-ös módosítását, azaz az $|\frac{2}{x+2}| \geq 1$ egyenlőtlenséget.
- Az óra végén pedig logikai feladatokat vettünk, 1.5-1.11, megbeszéltük, hogy az 1.8 igaz. Ha nem lenne igaz, mutatnunk kellene egy 2-re végződő páros négyzetszámot, amit nem lehet, mert négyzetszám nem végződhet 2-re! Hasonlóan igaz az 1.11-es is, hiszen nem tudunk mutatni egy teremben röpködő piros krokodilt, ami nem 17-nél nagyobb prímszám. ("Az üres halmaz minden elemére minden igaz.")
- **Házi feladat:** 2.17, 3.60, 3.62, 3.69, 3.70
- **Tanulni:** jegyzet 2. fejezet 2. szakasz (egyenlőtlenségek), 3. fejezet 2. szakasz (páros, páratlan függvények)
- Szorgalmi: 1.41

Harmadik gyakorlat (okt.4.)

- röpzh
- Házi feladatok megbeszélése
  - 3.60-3.70: Megbeszéltük a definíciókat, hogy mit jelent az, hogy egy függvény páros, illetve páratlan. A párosság, illetve páratlanság igazolásához minden x-re be kell látni a definíció teljesülését. Ahhoz, hogy egy függvény nem páros, vagy nem páratlan, elegendő egyetlen ellenpéldát mutatni. Megbeszéltük, hogy a konstans nulla függvény páros és páratlan is, tehát a két tulajdonság nem kizáró.
  - 2.17. Részletesen végigbeszéltük, hogy hogyan kell esetenként végigszámolni, a legnehezebb a megfelelő „és" és „vagy" kötőszavak használata. Ha két eset az „és" kötőszóval van összekapcsolva, akkor a megoldáshalmazok metszete, ha pedig „vagy" kötőszóval, akkor a kapott megoldások uniója kell. Fontos, hogy mindig nézzük meg, milyen fő esetünk van, amelyen belül ismét esetekre bontottunk. (Órán színessel külön jelöltem.)
- Egészrész: $x - 1 < [x] \leq x$, ez szóban megfogalmazva: „az x-nél nemnagyobb egészek közül a legnagyobb"
- Törtrész: definíció: $\{x\} = x - [x]$ Azaz egy szám törtrészét úgy kapjuk, hogy magából a számból kivonjuk annak egészrészét.
- Mindkét függvénynek fölrajzoltuk a grafikonját, megbeszéltük, hogy negatív számoknál figyelni kell.
  Gyakorlásként táblázatosan felírtuk a 3.176-3.183-as feladatok megoldását, majd megmutattuk, hogy az egészrész se nem páros, se nem páratlan és a törtrész függvény sem páros és nem is páratlan.
  A törtrésznél megbeszéltük, hogy ha az $x = \frac{1}{2}$-t vizsgáljuk, akkor abból, hogy $\{\frac{1}{2}\} = \{\frac{-1}{2}\}$ az következik, hogy a függvény nem páratlan, az viszont nem következik, hogy nem páros, ahhoz egy olyan x-et kell mutatni, ahol $f(x) \neq f(-x)$. Például az $x = -0{,}4$ már jó ellenpélda erre.
  Megmutattuk, hogy az egészrész függvénynek nincs maximuma, mert minden egész M-nél vesz fel nagyobb értéket például az $M + 1$ helyen, mert $[M + 1] = M + 1$.
- A házi feladathoz kis segítségként megbeszéltük és felrajzoltuk az $f(x) = 3[x]$ és a $g(x) = 3\{x\}$ függvény grafikonját.
- **Házi feladat:** 1.34, 1.37, 1.38, 3.185, 3.188, 5.51, 5.52.
- **Tanulni:** jegyzet 3. fejezet 6. szakasz (szakaszonként adott függvények)
- Szorgalmi: 3.146., Van-e olyan mindenütt értelmezett függvény, mely nem a konstans nulla és páros és páratlan is?

Negyedik gyakorlat (okt.11.)

- röpzh
- Házi feladat megbeszélése: 5.51 definíció szerint felírtuk, hogy mit jelent az, hogy páros és az, hogy szigorúan monoton. Megmutattuk, hogy ez a kettő egyszerre nem teljesülhet. ($f(-1) = f(1)$ mert f páros, de ha f szigorúan monoton nő, akkor $f(-1) < f(1)$) Az 5.52 is hasonlóan belátható definíció alapján, de az 5.51 felhasználásával indirekten egy sor: tegyük fel, hogy szigorúan monoton és páros. Ez ellentmondás az 5.51 alapján.
- Állítások tagadása: még a házi feladat kapcsán előkerült, hogy mi is az indirekt feltevés, ahogy éppen az állítás ellenkezőjét vizsgáljuk. Megbeszéltük az 1.17-esben az összes mondatot egyesével, hogy mit jelent, mikor igaz. Egy állítás tagadása pontosan akkor igaz, mikor az eredeti állítás hamis és pontosan akkor hamis, mikor az eredeti állítás igaz. A „ha *ez*, akkor *az*” alakú állítások tagadás az „*ez* és nem *az*”. Ezt könnyebb meggondolni, ha az állítás elé odaképzeljük a „minden esetben”-t az elejére, így elég egyetlen ellenpéldát adni, hogy van olyan eset, amikor hull a hó és Micimackó nem fázik.
- Periodikus függvények: megbeszéltük a definíciót, hogy miért kell a $p \neq 0$ és az $x - p$ feltételként. Abból, hogy a függvény periodikus, nem következik, hogy az egész számegyenesen értelmezve van, erre példákat is mondtunk, rajzoltunk. Kérdésként felmerült, így állításként kimondtam, hogy ha p periódusa f-nek, akkor minden k nemnulla egész számra kp is periódusa f-nek. ($k = 2$ esetre a bizonyítást is megnéztük.)
- 3.102, 104, 107: Azt, hogy az x^2 nem periodikus, kétféle módon is megnéztük, egyrészt definícióból kiindulva, hogy $f(x) = f(x+p)$ alapján $x^2 = (x+p)^2$, ami nem teljesülhet minden x-re. Másrészt megmutattuk, hogy a 0-t csak a 0-ban veszi fel, tehát $x = 0$-hoz nem létezik olyan $p \neq 0$, melyre a definíció teljesülne. Ez általában jó ötlet, hogy egy függvényről megmutassuk, hogy nem periodikus, ha találunk egy olyan értéket, amit csak egyszer vesz fel. Így könnyű igazolni, hogy az $|x| + 1$ sem periodikus (bár itt nem a nulla a kérdéses érték). A konstans függvény minden nemnulla szám szerint periodikus. Felrajzoltam és meggondoltuk, hogy a $[\sin x]$ 2π szerint periodikus.
- **Házi feladat:** 3.6, 3.7, 1.25., 3.84, 3.85,3.98/b, 3.95. a feladat első állításából következik-e, hogy f periodikus?
- **Tanulni**: Jegyzet 3. fejezet 2. szakasz, 3. fejezet 3. szakasz (függvénykompozíció)
- Szorgalmi: A Földes példa összes többi megoldása, 1.42
- Beadható e-mailben vagy jövő órán és akkor kijavítom úgy, mintha a zh-ban lenne: 3.267

Ötödik gyakorlat (okt.18.)

- röpzh
- Házi feladat megbeszélése:
  - 3.6-ost definíció alapján megmutattuk, hogy két szigorúan monoton növő függvény összege nem lehet szigorúan monoton csökken, de ha a szigorúságot nem követlejük meg, akkor például két konstans függvény teljesíti azt, hogy két monoton növekvő függvény összege monoton csökkenő.A 3.7 alapján mutattam példát, hogy szorzatuk lehet monoton csökkenő.
  - 3.84, 3.85. egy példán keresztül mindkét feladatra hoztunk ellenpéldát, legyen $f(x) = 2$, $g(x) = x^3$, ekkor f páros, g páratlan (ezt is meg kell mutatni), az összegük viszont nem páros és nem is páratlan (ehhez elég egy ellenpélda pl $x = 1$ jó).
- 3.109 Első lépésként megmutattuk, hogy $\{x\}$ $p = 1$-re periodikus, felírtuk a törtrész definícióját, megmutattuk, hogy $[x] + 1 = [x + 1]$, mert $x < [x] + 1 \leq x + 1$ és $x < [x + 1] \leq x + 1$. Kitérőként beszéltünk az összetett függvényekről, hogy általában $f \circ g \neq g \circ f$ (erre mutattunk is példát, hogy azt, hogy két függvény nem egyenlő, úgy lehet megmutatni, hogy hozunk egy x értéket, melyben a két függvény más értéket vesz fel). Az $\{x\}^2$ is összetett függvény, melyben a belső függvény periodikus, így más is lehet a külső függvény, a kompozíció periodikus lesz.

  Az nem igaz, hogy ha f^2 periodikus, akkor f periodikus. Legyen $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} x \neq 0 \\ -1, & \text{ha} x = 0 \end{cases}$

  Ez nem periodikus, mert a -1-et csak egyszer veszi fel, de a négyzete a konstans 1 függvény, amely periodikus.

  Felmerült kérdésként: abból, hogy a külső függvény periodikus, még nem következik, hogy a kompozíciófüggvény periodikus lesz. (Bizonyítást lásd a külön fájlban.)
- 5.24. Az ábra segít, de nem bizonyító erejű, ha két függvény nem azonos, mutatni kell egy ellenpéldát, egy olyan x-et ahol más értéket vesznek fel. Itt az $x = \frac{1}{2}$ jó példa.
- Házi feladat: gyakorlás a zh-ra (lásd Besenyei Ádám honlapján a gyakorló feladatsort), konzultáció e-mailben egyeztetve.

  Jövő héten a ZH-t a gyakorlat termében és idejében írjuk.

Hatodik gyakorlat – ZH

Hetedik gyakorlat

- ZH megbeszélés, az A csoport részletes megoldását lásd a honlapomon.
- Injektivitás: egy függvény injektív, ha különböző értelmezési tartománybeli elemekhez különböző értékeket rendel. Azaz ha $x \neq y$, akkor $f(x) \neq f(y)$. Ezzel ekvivalens, hogy ha $f(x) = f(y)$, akkor $x = y$. Ezt fogjuk általában majd megmutatni. A függvényt, mint hozzárendelést krumplikkal, nyilakkal fel is rajzoltam. Az ábra segít. érdemes a kérdéses függvényt vázlatosan felrajzolni.
  Példaként megnéztük az $f(x) = x^2$ függvényt először a teljes számegyenesen, majd a $[0, \infty)$ intervallumon.
  Az $f(x) = x^2$ az egész számegyenesen nem injektív, mert például $2 \neq -2$, de $f(2) = 4 = f(-2)$. A $[0, \infty)$ intervallumon viszont injektív, ezt a definíció alapján néhány algebrai átalakítással beláttuk.

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 \\ x^2 - y^2 &= 0 \\ (x-y)(x+y) &= 0 \end{aligned}$$

  Ez pedig az $x, y \geq 0$ feltétel mellett csak úgy teljesül, ha $x = y$.
- Inverz: Legyen f injektív függvény. Ekkor f inverze f^{-1}, mely $R(f)$-en van értelmezve és melyre $f^{-1}(y) = x$, ahol $f(x) = y$. Az inverz tehát visszakeresi adott y függvényértékhez tartozó x helyet. f injektivitása miatt ez egyértelmű. Az inverzfüggvény $R(f)$-ből $D(f)$-be képez, ezt is felrajzoltam a krumplikkal.
  Mivel adott függvény inverzét a koordináták felcserélésével kapjuk, az inverz grafikonját az f függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre való tükrözésével is megkaphatjuk.
  „Recept” az inverz megkereséséhez: (Természetesen lehet másképp is jelölni, hogy az inverz függvény változóját meghagyni y-nak.)
  - Igazoljuk, hogy f injektív.
  - írjuk fel a függvényt $y = f(x)$ alakban
  - cseréljük meg a koordinátákat $x = f(y)$
  - fejezzük ki y-t
  - egy adott érték behelyettesítésével döntsük el az előjelet
- Példa: 3.128. Teljes négyzetté alakítás után felrajzoltuk a függvényt és igazoltuk, hogy a $[2, \infty)$ intervallumon injektív.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= y^2 - 4y \\ (x-2)^2 - 4 &= (y-2)^2 - 4 \\ (x-2)^2 &= (y-2)^2 \\ (x-2)^2 - (y-2)^2 &= 0 \\ [x-2+y-2]\,[x-2-(y-2)] &= 0 \\ (x-y)(x+y-4) &= 0 \end{aligned}$$

  Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla. Ez pedig az $x, y \geq 2$ feltétel mellett csak úgy teljesül, ha $x = y$, tehát ezen az intervallumon injektív. Inverzet a „recept” alapján kerestünk. $2 \pm \sqrt{x+4} = y$ és az inverz függvény például a 0-ban 4-et vesz fel, tehát az $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+4}$ hozzárendelési szabállyal adható meg.
- Racionális számok: Azokat a valós számokat, amelyek felírhatóak két egész szám hányadosaként, racionálisnak nevezzük. A racionális számok halmazának jele $\mathbb{Q}$.
  Amely valós számok nem írhatóak fel két egész szám hányadosaként, azok az irracionális számok.

A $\sqrt{2}$ irracionális, mivel ennek bizonyítását majdnem mindenki látta már, nem beszéltük meg, de a jegyzetben (2. fejezet 1. szakasz) benne van.

- Példák: a 2.1-esben beláttuk, hogy két racionális szám összege is racionális, majd a 2.3/a feladatban indirekt igazoltuk, hogy a $3 + \sqrt{2}$ irracionális.
- Házi feladat: 3.130, 3.131, 3.141, 3.142 (inverz)
  2.8, 2.9, 2.11, 5.43 (racionális, irracionális számok)
- Tanulni: jegyzet 2. fejezet 1 szakasz (racionális, irracionális számok), 3. fejezet 9. szakasz (inverz)
- Szorgalmi: 1.43 (átkelés a hídon)

Nyolcadik gyakorlat (nov.15.)

- Házi feladatok megbeszélése: 3.130, 3.131. Érdemes vázlatosan felrajzolni a függvény grafikonját. Ha egy függvény nem injektív, elég két különböző értelmezési tartománybeli helyet mutatni, ahol a függvényérték megegyezik. A [-5,2] intervallumon injektív, ezt a definícióból kiindulva a múlt óraihoz hasonlóan igazoltuk. Inverzét az $y = 2 \pm \sqrt{x+3}$ összefüggésből egy konkrét érték behelyettesítésével kapjuk. $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+3}$, mely a [-3,46] intervallumból a [-5,2]-be képez. $R(f) = [-3, 46] = D(f^{-1})$, illetve $R(f^{-1}) = D(f) = [-5, 2]$
  3.141. Néhány példa: $f(x) = x$; $\frac{1}{x}$; $-x + c$, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.
  3.142: Nem igaz, mert a függvény nem biztos, hogy injektív. (Ha injektív, akkor igaz.)

- 3.36, 3.38. Szélsőérték-keresés. Az $f(x) = x^2 + x - 6$ hozzárendelést célszerű teljes négyzetté alakítani, akkor könnyű ábrázolni és ebből az alakból a minimum helye és értéke is leolvasható. $x^2 + x - 6 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4}$, minimumhelye $x = -\frac{1}{2}$, értéke $y = -\frac{25}{4}$. Maximuma nincs, ezt el tudjuk fogadni. (Az x^2 függvényhez hasonlóan lehetne bizonyítani.)
  Zárt intervallumon szélsőértékhely-jelöltek lesznek az intervallum végpontjai is, ezeket is meg kell nézni. $f(-3) = 0$, $f(10) = 104$, $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{25}{4}$ Így tehát maximum helye $x = 10$, értéke 104, minimumhelye $x = -\frac{1}{2}$, értéke $y = -\frac{25}{4}$. Azt meg kell nézni, hogy az $x = \frac{1}{2}$ benne legyen a [-3,10] intervallumban.

- Számtani és mértani közép. 2.27-es feladatban megmutattuk, hogy az a_1, a_2 számok számtani közepére igaz, hogy $a_1 \leq \frac{a_1+a_2}{2} \leq a_2$.

$$\begin{aligned} a_1 &\leq \frac{a_1 + a_2}{2} \\ 2a_1 &\leq a_1 + a_2 \\ a_1 &\leq a_2 \end{aligned}$$

  Itt nagyon fontos, hogy ekvivalens átalakításokat végeztünk, azaz ezeken a lépéseken visszafelé haladva igaz állítást kapunk. (Házi feladat az egyenlőtlenség másik oldalát igazolni.)
  Az a_1, a_2 **nemnegatív** számok mértani közepére igaz, hogy $0 \leq a_1 \leq \sqrt{a_1 a_2} \leq a_2$. Ezt is lehet ekvivalens lépéseken keresztül az előbbihez hasonlóan igazolni, illetve direkt úton is:

$$\begin{aligned} a_1 &\leq a_2 &\quad& / \cdot a_2 \quad (a_2 > 0,\ \text{a relációsjel nem változik}) \\ a_1 a_2 &\leq a_2^2 && a_1, a_2 \geq 0,\ \text{ezért lehet gyököt vonni} \\ \sqrt{a_1 a_2} &\leq a_2 \end{aligned}$$

- Számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség: a_1, a_2 nemnegatív számokra fennáll, hogy $A = \dfrac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} = G$. Bizonyítását lásd a példatárban.

- 2.30: megnéztük teljes négyzetté alakítással, illetve a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséggel, $a_1 = x$, $a_2 = 1 - x$. Ha $x \in [0, 1]$, akkor $a_1, a_2 \geq 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} A &\geq G \\ \frac{x + 1 - x}{2} &\geq \sqrt{x(1-x)} \\ \frac{1}{4} &\geq \sqrt{x(1-x)} \end{aligned}$$

  Ebből még nem következik, hogy a maximuma $\frac{1}{4}$, ehhez kell mutatni egy helyet, ahol ezt az értéket felveszi, erre az $x = \frac{1}{2}$ jó.

- 2.34. Az előbbihez hasonlóan ezt is meg lehet oldani algebrai átalakításokkal (figyelni kell az ekvivalens lépésekre), illetve a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséggel az x és az $\frac{1}{x}$ számokra felírva.

- Házi feladat: 3.39. (másodfokú), 2.37, 2.38. 2.42 (nevezetes közepek), 5.71, 5.73 (inverz, páros)
- Tanulni: Jegyzet 2.3, 2.4 (számtani, mértani közép), 3.8 (másodfokú függvény szélsőértéke)
- Szorgalmi: 2.40

Kilencedik gyakorlat (nov.22.)

- röpzh
- házi feladatok megbeszélése, $A \geq G$ alkalmazása szélsőértékek meghatározásához. 2.34, 2.37, 2.39. Ahhoz, hogy a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget használjuk, mindig meg kell nézni, hogy a számok nemnegatívak. $f(x) = x^2+1+\dfrac{1}{x^2+1}$ esetén $a_1 = x^2+1$, $a_2 = \dfrac{1}{x^2+1}$. Ezek mindig pozitív kifejezések, tehát alkalmazhatjuk az egyenlőtlenséget.

$$\frac{x^2+1+\dfrac{1}{x^2+1}}{2} \geq \sqrt{(x^2+1)\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}$$
$$x^2+1+\frac{1}{x^2+1} \geq 2$$

  Ebből még nem következik, hogy a keresett függvény minimuma 1! Meg kell mutatni, hogy ezt az értéket felveszi. Ezt lehet „ránézésre”, vagy azt felhasználva, hogy a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség akkor teljesül egyenlőséggel, ha a két szám megegyezik. Itt $x = 0$ esetén teljesül, $f(0) = 1$, tehát az 1 valóban minimuma.
  Előfordulhat, hogy a számtani-mértani középpel kijött minimumot/maximumot nem veszi fel a függvény, erre volt példa az $f(x) = x^2+2+\dfrac{1}{x^2+2}$. Az előbbi gondolatmenettel kapott 2-t nem fogja sehol sem felvenni. Az igaz, hogy mindenhol 2-nél nagyobb vagy egyenlő értéket vesz fel, de a 2 nem minimuma.

- **Egyenlőtlenségek, következtetések**
  Három dolgot lehet használni, ezek alapján oldottunk meg a kiegészítő feladatsorról néhány egyenlőtlenséget. (A feladatsor fent van a honlapon.)

  1. tranzitivitás: $a < b$ és $b < c \Rightarrow\ a < c$
  2. hozzáadás: $a < b$ és c tetszőleges szám $\Rightarrow\ a + c < b + c$
  3. szorzás: $a < b$ és $c > 0 \Rightarrow\ ac > bc$

  Ezekhez még két „apróság”:
  Ha $a < 0$, akkor $-a > 0$.
  Ha $a > 0$, akkor $\dfrac{1}{a} > 0$.

- 4-est megnéztük közösen:

$$4\colon a < b \overset{\text{hozzáadás}}{\underset{+(-a)}{\Longrightarrow}} 0 < b - a \overset{\text{hozzáadás}}{\underset{+(-b)}{\Longrightarrow}} -b < -a$$

  Az 5. megoldása: $a < b$ és $c < 0$

$$a < b \overset{\text{szorzás}}{\underset{/\cdot(-c)}{\Longrightarrow}} -ac < -bc \overset{\text{hozzáadás}}{\underset{+ac+bc}{\Longrightarrow}} bc < ac$$

  A 20-as:

$$\left.\begin{aligned} a < b &\overset{\text{hozzáadás}}{\underset{+c}{\Longrightarrow}} a + c < b + c \\ c < d &\overset{\text{hozzáadás}}{\underset{+b}{\Longrightarrow}} b + c < b + d \end{aligned}\right\} \overset{\text{tranzitivitás}}{\Longrightarrow} a + c < b + d$$

- önálló munkában 6,7,20,21,10,11, ezeket utána elkezdtük megbeszélni, befejezni házi feladat. A 6-os nem igaz, például $a = -2,\ b = -1$ esetén $a < b$, de $4 \not< 1$

- 2.19-es: Ábrázolás ismét segít, az első rész megoldása $y \in (-\infty, -5) \cup ((5, \infty)$. A második részben könnyen látszik, hogy az $y = 5$ jó, sőt, megbeszéltük, hogy minden $5 \leq y$ jó. Az $y = -5$ nem lesz jó, mert például az $x = -4$-re teljesül, hogy $x > y$, de $x^2 = 16 \not> 25$. Hasonlóan, ha $y < 5$, akkor $x = 5$ ellenpélda, tehát csak az $y \in [5, \infty)$ lesz jó megoldás.

- Házi feladat: 1.31, 1.32, 1.33, 5.63, 5.64
  kiegészítő feladatsorról 10,11,14,15

- Szorgalmi: Tegyük fel, hogy $a < b$ és $x < y$. Melyik nagyobb: $ax + by$, vagy $ay + bx$? Hogyan fogalmazzuk át a feladatot, hogy egy ötödikes is meg tudja oldani?

Tizedik gyakorlat (nov. 29.)

- utolsó röpzh
- Házi feladat megbeszélése – ezen csak gyorsan átmentünk, a kiegészítő feladatsorról a 14-es kapcsán megbeszéltük, hogy ha pozitív, akkor $\frac{1}{a}$-val is lehet szorozni. A 14-esre egyszerű ellenpéldát mutattunk, akár az $a = -1$, $b = 1$ jó. Az 1.33-asra szintén mutattunk két példát, hogy egyik állításból sem következik a másik.
- Becslések.
  Alapszabályok:
  - Nem kell megoldani az egyenlőtlenséget, elég egyetlen N-et megadni.
  - Abból, hogy $n = k$-ra igaz, még nem következik, hogy $k < n$-re is igaz.
  - Nem kell a legkisebb N-et megadni.

  Hasznos megjegyzések: ha nemnegatív tagokat hagyok el egy összegből, akkor azzal az összeget nem növelem, illetve felső becslésnél ha minden tag helyett a legnagyobb tagot írom be, akkor az összeget nem csökkentem. Nem érdemes rendezgeti, azzal nem fog kijönni. Az elején célszerű olyan alakra hozni, hogy a „domináns” tag (bármit is jelentsen ez, de mindenki érzi, hogy mi van mögötte) legyen az egyik oldalt, a másik oldalon pedig a többi tag, majd ezt kell elkezdeni felülről becsülni.
- 4.52. $10n^3 + 3n^2 + 1 < n^5 + 3n + 2$ A „domináns” tag az n^5, ezt hagyjuk jobb oldalt, a többit átvisszük.
  $10n^3 + 3n^2 - 3n - 1 < n^5$. A bal oldat elkezdjük felülről becsülni, először a nempozitív tagokat lehagyjuk. A -1 mindig elhagyható, a $3n$ csak $n > 0$ esetben. A becslés során teszünk feltételeket, azokra figyelni kell!
  $10n^3 + 3n^2 - 3n - 1 < 10n^3 + 3n^2$. Az lenne a jó, ha n-nek csak egyféle hatványa szerepelne, tehát minden tag helyébe a legnagyobbat írjuk.
  $10n^3 + 3n^2 - 3n - 1 < 10n^3 + 3n^2 < 10n^3 + 3n^3$. Ez csak akkor igaz, ha $1 < n$.
  Ekkor elég lenne, ha $13n^3 < n^5$ teljesülne, hiszen ekkor az egyenlőtlenségláncon végigmenve az eredeti is teljesül. (Kihasználjuk a tranzitivitást.)

  $$\begin{aligned} 13n^3 &< n^5 \\ 13 &< n^2 \quad (*) \\ \sqrt{13} &< n \end{aligned}$$

  A becslés során tett feltételeket ($0 < n$, $1 < n$) is figyelembe véve ha $\sqrt{13} < n$, akkor az egyenlőtlenség teljesül. Ha $100 < n$, akkor is igaz, tehát minden 100-nál nagyobb szám kielégíti az egyenlőtlenséget. Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza viszont nem a $(100, \infty)$ intervallum, hiszen ebben a 100 nincs benne, de könnyen ellenőrizhető behelyettesítéssel, hogy az is megoldása.
  $(*)$ Itt úgy is lehet folytatni, hogy $n < n^2$, ha $n > 1$, tehát $13 < n$ lesz a becslés végeredménye. Mivel nem kell a legkisebb n-et megadni, ez is teljesen jó megoldás.
- Megnéztük még közösen a 4.16-ost, melyre először gyűjtöttünk alsó és felső becsléseket, hiszen ha elsőre nem tudjuk, hogy mit szeretnénk látni, akkor így lehet elindulni. A számlálóban végül minden tagot $\sqrt{n}$-nel becsültünk felülről, majd megmutattunk, hogy az $\frac{n\sqrt{n}}{n^2} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ sorozatnak sincs 100-nál nagyobb tagja, mert $\frac{1}{\sqrt{n}} < 1$, ha $n > 1$.
- A becslésekhez egy kis segítség elérhető Besenyei Ádám honlapján: (alapszabályok, illetve egy nagyon részletesen kidolgozott feladat) `http://abesenyei.web.elte.hu/mattanar/18o/bevanal118o/bevanal118o.php`

- Házi feladat: 4.19, 4.28, 4.43-56
- Tanulni: jegyzet 2.5 (becslések)
- Szorgalmi: 4.20

Tizenegyedik gyakorlat (dec. 06.)

- Házi feladatok megbeszélése
- 4.53-55. A feladat szerint van olyan N, hogy minden $n > N$ esetén $a_n > b_n$. Az a kérdés, hogy következnek-e ebből az állítások. Mivel egyik esetben sem következnek, ezért egyetlen ellenpéldát elég mutatni. Erre jó az órán is megbeszélt $a_n = 2n$, $b_n = n$ sorozatpár, (illetve az $a_n = 1$ és a $b_n = 0$ minden n-re, tehát két konstans sorozat.)
  - minden $n < N$ esetén $a_n < b_n$
    nem, hiszen az előbbi sorozatokra teljesül, hogy például $N = 3$ esetén minden $n > N$-re $a_n > b_n$, ugyanakkor minden $n < N$-re is az igaz, hogy $a_n > b_n$.
  - van olyan $n < N$, hogy $a_n < b_n$
    nem, erre is jó az előbbi példa, hiszen minden n-re igaz, hogy $a_n > b_n$.
  - $a_n > b_n$ akkor és csak akkor, ha $n > N$
    ez sem következik, az előbbi sorozatok jó ellenpéldát adnak.
- 4.28. Nem mindig tudjuk előre, hogy adott a_n sorozatnak van-e 100-nál nagyobb tagja. Ha azt sejtjük, hogy nincs, akkor a bizonyításhoz elég mutatni egy b_n sorozatot, melyre $a_n < b_n < 100$. ha azt sejtjük, hogy van az a_n sorozatnak 100-nál nagyobb tagja, akkor elég mutatni egy olyan b_n sorozatot, melyre $100 < b_n < an$ teljesül.
  Itt az a sejtés lesz helyes, hogy a megadott sorozatnak van 100-nál nagyobb tagja, tehát egy alsó becslést keresünk. Becsüljünk minden tagot alulról $\frac{1}{\sqrt{n}}$-nel. (Ha a tört nevezőjét növeljük, a tört értékét csökkentjük.) Ekkor

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

  Ezért elég lenne, ha $\sqrt{n} > 100$ teljesülne. Ez pedig $n > 10\ 000$ esetén teljesül. Ekkor az egyenlőtlenség-lánc miatt az $a_n > 100$ is teljesül, tehát valóban lesz 100-nál nagyobb tagja.
- 4.39 egy újabb gyakorlás a becslésre, $n > 1106$ esetén teljesül, tehát $N = 1106$ jó lesz. (Megjegyzés: lehet kisebbet is mondani, de meg kell indokolni. Ez is már $n > 2$re teljesül, de nem kérte a feladat, hogy a legkisebbet megadjuk, elég egyetlen jó N-et megadni.)
- Játék: keressük meg a függvények inverz-párjait
- Játék: Következik-e? (A feladatok Besenyei Ádám honlapján megtalálhatóak `http://abesenyei.web.elte.hu/mattanar/18o/bevanal118o/bevanal118o.php`)

- ZH december 13-án 14:00-16:00-ig
- Konzultáció: december 13., 12-14 D 4-429-es terem
- Gyakorló feladatsor Besenyei Ádám honlapján