Egyváltozós analízis 1. gyakorlat
2019/20. I. félév
3. csoport, csütörtök 14:05-15:35

1. gyakorlat (szept. 12.)

- Bevezető rajzolgatós feladat: 3.40, 3.41 (egyenlőre monotonitás nélkül)
- Korlátosság: definíció: 3.42, alkalmazás $f(x) = x^2$, $f(x) = \{x\}$
- Monotonitás: definíció, példa $f(x) = \{x\}$ (a $(0, 1)$-n monoton nő, de a$[0, 1]$-en nem monoton.)
- Konvexitás: definíció, ekvivalens definíció a meredekségfüggvény monotonitásával.
  3.85, x^2-ről mindkét módon megmutattuk, hogy $(0, \infty)$-n szigorúan konvex.
  $f(x) = \{x\}$ a $(0, 1)$-n konvex és konkáv is, a $[0, 1]$-en meggondolandó! $f(x) = \{x\}$ $\mathbb{R}$-n nem konvex és nem konkáv, két ellenpéldával beláttuk.

Házi feladat

3.40, 3.41 (monotonitással, rajz elég, ha jó, de ha nincs olyan függvény, azt bizonyítani is kell)
3.86 (konvexitás, érdemes nem csak az ekvivalens definícióval megcsinálni) 3.89, 3.90, 3.92

Szorgalmi

Túrórudiért: Melyik nagyobb? $3^{2019} + 5^{2019}$ vagy $2 \cdot 4^{2019}$

2. gyakorlat (szept. 19.)

- Házi feladatok megbeszélése: 3.40-re egy rajz, 3.41-re megmutattuk, hogy nem létezik a feltételnek megfelelő függvény.
- Folytonosság: definíció alapján mutattunk jó δ-t minden ε-hoz: Kieg. 1.18, 1.15., 1.13, 1.14. A „legyen $\delta < 1$" feltételt mi önkényesen kiszabhatjuk, de ez nem mindig elég. (pl egy racionális törtfüggvény nevezőjének gyöke ne essen bele a vizsgált pont δ sugarú környezetébe)
- Logikai feladatok: 3.220
- A Dirichlet-függvény nem folytonos a 0-ban. (Megjegyzés: sehol sem folytonos.) Ha egy függvény adott pontban nem folytonos, legkönnyebb úgy lehet igazolni, hogy a folytonosság definícióját letagadjuk és adunk egy ε-t, melyhez nincs δ.

Házi feladat

Kieg. 1.16, 1.17
Fgy. 3.222, 3.218

Szorgalmi

Van-e olyan függvény, amely pontosan két pontban folytonos?
3.220-as példa P$\Longrightarrow$ Q irányának bizonyítása átviteli elv nélkül

3. gyakorlat (szept. 26.)

- röpzh
- Házi feladat megbeszélése: 3.222 (egyik sem következik), 3.218
- Folytonosságra vonatkozó átviteli elv: K 1.57, 1.59. (ha ellenpéldát kell adni, mi adhatjuk a függvényt, ilyenkor célszerű minél egyszerűbbet választani/kitalálni, sokszor jó az egy pontban módosított konstans függvény), 1.49 ha f folytonos, akkor könnyű dolgunk van, egyébként egyik állításból sem következik a másik.
  K 1.51, 1.52, sorozatok határértékét kell megvizsgálni, majd az átviteli elvre hivatkozva lehet megmondani a kérdéses határértéket

Házi feladat

Kieg. 1.50, 1.55, 1.58, 1.60

4. gyakorlat (okt. 3.)

- röpzh
- Házi feladat megbeszélése: 1.50.
- Függvényhatárérték definíciója alapján igazolt határértékek: K. 1.67, 1.70, $\{2x\}$, 1.77, 1.81.

Házi feladat

K. 1.18-1.82 közül ami kimaradt
Beadható gyakorló feladatok külön fájlként feltöltve.

5. gyakorlat (okt. 10.)

- Függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv. 3.200 Ennek segítségével igazoltuk, hogy az$f(x) = \{x\}$ függvénynek nincs határértéke a ∞-ben. (Mutattunk két jó sorozatot.)
- Határértékre vonatkozó átviteli elv és logika: 3.208 P-ből nem következik Q, erre néztünk közösen ellenpéldát.
- Határérték és műveltek: felírtuk az összeadásra, szorzásra és reciprokra vonatkozó táblázatokat. Az utóbbi kettő segítségével lehet a hányadosra vonatkozót is felírni. Kritikus limeszek: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, önmagában az is, ha a nevező 0, itt akkor nincs gond, ha tudjuk, hogy 0^+, vagy 0^-.
- Feladatok: 3.144, 3.169, 3.080, 3.183

Házi feladat

3.166-185 (határérték és műveletek)

Szorgalmi

3.209

6. gyakorlat 1. ZH

7. gyakorlat (okt.24.)

- ZH megbeszélése: ötletek, tipikus hibák, megjegyzések
- Nagyságrendek, nevezetes határértékek: K. 1.87, 1.88
- Rendőr-elv: K. 1.101, 1.102
- e^b típusú limeszek: K. 1.95-98

8. gyakorlat (nov.7.)

- Weierstrass-tétel: Első példa:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$
és nézzük a $[-1, 1]$ intervallumon. Ennek nincs se minimuma, se maximuma.
3.239, 3.240, 3.242, 3.246, 3.258

- Bolzano-Darboux-tétel: Bizonyítsuk be, hogy az $x^3 + x^2 + x + 1$ polinomnak van valós gyöke! Általánosságban bizonyítsuk, hogy minden harmadfokú polinomnak van valós gyöke! 3.234a, egyfelől elég az, hogy a számtani közép a két szám között van. Egy másik ötlet, ha a $g(x) = f(x) - \frac{f(a)+f(b)}{2}$ függvény gyökét keressük az $[a, b]$ intervallumon. (Itt most nem feltétlen látszik, de az eltolós ötlet sok esetben jól jöhet.) 3.263

Házi feladat

3.241,3.243-246, 3.236, 3.259

Szorgalmi

Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, mely minden valós értéket végtelen sokszor felvesz?

9. gyakorlat (nov.14.)

1. Bizonyítsuk be a Bolzano–Darboux-tétel segítségével, hogy minden $d > 0$ valós számhoz és n pozitív egészhez létezik olyan $x > 0$ valós szám, amelyre $x^n = d$
2. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ akkor az f függvény a számegyenes semmilyen nem elfajult intervallumán sem monoton.
3. Igazoljuk, hogy az $f(x) = a^x$ exponenciális függvény szigorúan felezőpont-konvex, azaz $x_1 \neq x_2$ esetén: $a^{(x_1+x_2)/2} < \dfrac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2}$.
4. Igazoljuk, hogy $a > 1$ esetén $\log_a(x)$ szigorúan felezőpont-konkáv.
5. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

   (a) $2^x = 2x$
   Keressük meg a két könnyen látható megoldást (1,2). Vegyük észre, hogy az egyenes éppen a 2^x e két pontra fektetett húrjának egyenlete. Tudjuk, hogy a függvény szigorúan konvex az egész értelmezési tartományán. Ebből következik, hogy a megtalált két metszéspont között nincs más metszéspont (mert a függvény a húr alatt van). Vegyünk fel egy tetszőleges

$c > 2$ pontot, majd írjuk fel a konvexitás definícióját az $[1, c]$ intervallumon úgy, hogy a 2 legyen a belső pontja. Ezt $f(c)$-re átrendezve megkapjuk, hogy$f(c) > h_{1,2}(c)$, azaz nem lesz több metszéspont. Hasonlóan vegyünk fel egy $d < 1$ pontot s írjuk fel a $[d, 2]$-n a konvexitás definícióját, majd rendezzük $f(d)$-re és megkapjuk azt, amit szeretnénk, hogy $f(d) > h_{1,}(d)$, tehát itt sem lesz másik metszéspont. Tehát az egyenletnek az $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$ a megoldása.

(b) $\log_2(x) = x - 1$

Házi feladat

- Igazoljuk, hogy $0 < a < 1$ esetén a $\log_a x$ szigorúan felezőpont konvex!
- Fgy 4.227
- Logaritmus azonosságai (hatvány, tört, áttérés más alapra)
- Az órai 5/b-re nem volt már idő, érdemes megnézni, ugyanazon múlik.

Igazoljuk, hogy $0 < a < 1$ esetén a $\log_a x$ szigorúan felezőpont konvex!

Szorgalmi

Lehet-e irracionális szám irracionális kitevőjű hatványa racionális?

10. gyakorlat (nov.21.)

- röpzh
- Trigonometrikus függvények inverzei: 4.241 első négy függvénye, megbeszéltük és felrajzoltuk az arcsin(x), arccos(x), arctg(x), arcctg(x) függvények értelmezési tartományát, értékkészletét.
- 4.229, 4.231, 4.234, sin(arcsin(3)) nem is értelmes
- Mozaikos könyvben megnézendő: sin(arcin(x)) és arcsin(sin(x)) függvények ábrázolása
- Deriválás definíció szerint: $f(x) = |x|$ az $a = 0$-ban nem deriválható (pl átviteli elvvel)

Házi feladat

- Trigonometrikus függvények inverzei: 4.230,4.232, 4.233, 4.241 második négy függvénye
- Mozaik Kiadó: Sokszínű matematika 11. osztályos tankönyv: 186, oldal 1 példa, 188. oldal 3. példa, 188. oldal 1,3-as feladat
- Deriválás: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ az $a = 0$-ban nem deriválható

11. gyakorlat (nov.28.)

- röpzh
- Házi feladatból $f(x) = \sqrt[3]{x}$ az $a = 0$-ban nem deriválható
- Nevezetes driváltak, $\log_a x, e^x, a^x, x^\alpha$
- Inverzfüggvény deriválása
- Deriválás definíció szerint: 4.19, 4.20
- Érintő egyenlete: 4.42
- Deriválási szabályok gyakorlása: 4.56, 57, 60, 61, 63, 76, 77, 94, 96 (Maradék házi feladat.)

12. gyakorlat (december 5.)

- röpzh
- Lokális és globális szélsőértékek intervallumon és $\mathbb{R}$-n értelmezett függvényeknél K. 1.111 (intervallumon is megnéztük), K 1.112–1.116
- Szélsőértékfeladatok: 4.155, 4.164, 4.160, 4.168, K 1.118