Bevezető analízis 1, 2018. ősz, 1. zh A

Tudnivalók. Minden feladat 1 pontot ér, de csak teljes **indoklással**. Részpontszám is kapható, azonban súlyos hibát tartalmazó megoldásra nulla pontot adunk, még ha a megoldásnak vannak helyes részei is. A dolgozat értéke osztályzatban kb. 1-gyel kevesebb az elért pontok számánál. A gyakorlatokon bizonyított állítások felhasználhatók bizonyítás nélkül az állítást pontosan idézve (például „Gyakorlaton bizonyítottuk, hogy...”), kivéve ha a feladat éppen a szerepelt állítás bizonyítása. A feladatok nem nehézségi sorrendben következnek, a megoldásukra 120 perc áll rendelkezésre.

Semmilyen segédeszköz nem használható, **számológép sem**! **Mobiltelefon, tablet, laptop stb. nem lehet az asztalon, használatuk tilos!** Jó munkát!

---

1. Van három láda, melyek mindegyikén egy felirat olvasható.

   A láda: $\boxed{\text{Az arany ebben a ládában van.}}$

   B láda: $\boxed{\text{Az arany nem ebben a ládában van.}}$

   C láda: $\boxed{\text{Az arany nem az } A \text{ ládában van.}}$

   Melyik ládában van az arany, ha tudjuk, hogy legfeljebb egy felirat igaz?

2. Oldjuk meg algebrailag a $\left|\frac{4}{x} - 1\right| \leq 6$ egyenlőtlenséget!

3. Van-e olyan nem páratlan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre
   (a) $x + f(x)$ páratlan?
   (b) $x + f(x)$ nem páratlan?

4. Legyen $f(x) = x^2$, ha $x \neq 0$, valamint $f(0) = 2$. Van-e minimuma, van-e maximuma az f függvénynek?

5. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényről tudjuk, hogy periódusa a 2, továbbá $f(1) = 0$. Következik-e ebből, hogy
   (a) $f(2018) = 0$?
   (b) $f(2019) = 0$?

6. (a) Igaz-e, hogy ha $x \neq 0$, akkor $\frac{\{x\}}{x} < 1$?
   (b) Van-e olyan $x \neq 0$ valós szám, melyre $[x] = 2x$?

7. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény. Mi a kapcsolat az alábbi két állítás között, azaz következik-e **P**-ből **Q**, következik-e **Q**-ból **P**?

   P: Minden x, y esetén teljesül, hogy ha $f(x) < f(y)$, akkor $x < y$.

   Q: Az f függvény monoton az egész számegyenesen.

1. Az A ládában nem lehet arany, mert különben az A és B láda felirata is igaz lenne. Hasonlóképpen, a C ládában sem lehet arany, mert ekkor a B és C láda feliratai lennének mindketten igazak. Ezek szerint sem az A, sem a C ládában nincs arany, így az A ládán lévő felirat hamis, a C ládán szereplő felirat igaz, ezért szükségképpen a B ládán olvasható felirat hamis, tehát a B ládában van arany.

2.
$$\left|\frac{4}{x}-1\right| \leq 6 \quad x \neq 0$$

Két esetre kell bontani attól függően, hogy az abszolútértékben álló kifejezésnek milyen az előjele:

i)
$$\frac{4}{x}-1 \geq 0$$
$$\frac{4}{x} \geq 1$$

Ha $x>0$, akkor ha x-szel szorzunk, a relációsjel nem fordul meg és $4 \geq x$. Tehát $x \in (0,4]$.
Ha $x<0$, akkor ha x-szel szorzunk, a relációsjel megfordul és $4 \leq x$, így viszont üreshalmazt kapunk, mert nem lehet egyszerre $x<0$ és $4 \leq x$.
Tehát ha $x \in (0,4]$, akkor az abszolútértékben nemnegatív kifejezés áll.
Ekkor:
$$\frac{4}{x}-1 \leq 6$$
$$\frac{4}{x} \leq 7$$

Ha $x>0$, akkor ha x-szel szorzunk, a relációsjel nem fordul meg és
$$4 \leq 7x$$
$$\frac{4}{7} \leq x$$

Mindezt kaptuk az $(0,4]$ halmazon, tehát *és* kapcsolattal összekötve $x \in \left[\frac{4}{7},4\right]$
Ha $x<0$ akkor ha x-szel szorzunk, a relációsjel megfordul. Itt nincs értelme folytatni, mert ha $x \in (0,4]$, akkor x nem lehet 0-nál kisebb.
Tehát itt a részmegoldás $\boxed{x \in \left[\frac{4}{7},4\right]}$

ii)
$$\frac{4}{x}-1 < 0$$
$$\frac{4}{x} < 1$$

Ha $x>0$, akkor ha x-szel szorzunk, a relációsjel nem fordul meg és $x<4$. Tehát $4<x$.
Ha $x<0$, akkor ha x-szel szorzunk, a relációsjel megfordul és $x<4$. Tehát $x<0$.
Tehát az ii) eset akkor áll fenn, ha $x \in (-\infty,0) \cup (4,\infty)$.
Ekkor az abszolútérték elhagyáskor a benne lévő kifejezés (-1)-szeresét kell venni.
$$-\frac{4}{x}+1 \leq 6$$
$$\frac{4}{x}-1 \geq -6$$
$$\frac{4}{x} \geq -5$$

Ha $x > 0$, akkor ha x-szel szorzunk, a relációsjel nem fordul meg és $-\frac{4}{5} \le x$ és $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$, tehát ezek metszeteként $\boxed{4 \le x}$.

Ha $x < 0$, akkor ha x-szel szorzunk, a relációsjel megfordul és $-\frac{4}{5} \ge x$ és $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$, ezek metszeteként $\boxed{x \le -\frac{4}{5}}$.

A teljes megoldást pedig úgy kapjuk, hogy az esetek végén kapott részmegoldások unióját vesszük, azaz

$$x \in \left(-\infty, -\frac{4}{5}\right] \bigcup \left[\frac{4}{7}, \infty\right)$$

3. a) Indirekt tegyük fel, hogy van ilyen nem páratlan f függvény. Írjuk fel a definíciót, hogy mit jelent az, hogy $f(x) + x$ páratlan.

$$\begin{aligned} f(x) + x &= -\left(f(-x) + (-x)\right) \\ f(x) + x &= -f(-x) + x \\ f(x) &= -f(-x) \end{aligned}$$

Ez pedig az jelenti, hogy f páratlan, ami ellentmondás, mert abból indultunk, hogy f nem páratlan függvény. Tehát ilyen nem páratlan függvény nem létezik.

b) Ilyen f függvény van, legyen $f = 2$ konstans függvény. Ez nem páratlan, mert $f(0) \neq 0$, vagy ha nézzük a definíciót, akkor pl $f(1) = 2$ és $-f(-1) = -2$, de $-2 \neq 2$.
Ekkor $f(x) + x$ sem páratlan, nézzük például az $x = 1$-ben. Ekkor a bal oldalon $1 + 2 = 3$, a jobb oldalon pedig $-(2 - 1) = -1$, tehát az $f(x) + x$ függvény nem páratlan.

4. $f(x) = x^2$, ha $x \neq 0$, valamint $f(0) = 2$.
Ennek sem maximuma, sem minimuma nincsen.
Mivel a függvény sehol nem vesz fel nullát és negatív értéket, ezért a maximuma (ha van) is pozitív és a minimuma (ha van) is csak pozitív lehet.
Ahhoz, hogy f-nek nincs maximuma, elég, ha megmutatjuk, hogy minden $f(x_0)$ függvényértéknél felvesz nagyobb értéket a függvény. Nézzük például az $f(|x_0| + 1)$-et.

$$f(|x_0| + 1) = (|x_0| + 1)^2 = |x_0|^2 + 2|x_0| + 1$$

Ami pedig nagyobb x_0^2-nél, mert $2|x_0| + 1 > 0$.
A függvény a 0-ban értelmezve van, de ott nem az $f(x) = x^2$ szabály határozza meg a függvényértéket. Az $f(0) = 2$ nem minimuma, mert például $f(0{,}5) = 0{,}25 < 2$ és nem is maximum, mert például $f(2) = 4 > 2$.
Ahhoz, hogy belássuk, hogy f-nek nincs minimuma, meg kell mutatni, hogy minden $f(x_0)$-nál felvesz kisebb függvényértéket. Nézzük például az $\frac{|x_0|}{2}$ helyen, $f\left(\frac{|x_0|}{2}\right) = \frac{x_0^2}{4} < f(x_0) = x_0^2$

5. a) $f(2018) = 0$ ez nem következik belőle. Ezt úgy tudjuk igazolni, hogy mutatunk egy ellenpéldát.
Legyen $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ pártlan} \\ 1, & \text{egyébként} \end{cases}$
Ez $p = 2$ szerint periodikus. Ha $x = 2n + 1$ $(n \in \mathbb{Z})$, akkor $x + 2 = 2(n + 1) + 1$, ami szintén páratlan. Ha x nem páratlan, akkor $x + 2$ sem, indirekt tegyük fel, hogy $x + 2 = 2l + 1$ $(l \in \mathbb{Z})$ Ebből $x = 2(l-1)+1$ páratlan szám, ami ellentmondás. Tehát mutattunk egy függvényt, amelynek periódusa a kettő, $f(1) = 0$ teljesül rá és $f(2018) \neq 0$.

b) $f(2019) = 0$ Ez következik belőle, használjuk a periodikusság definícióját és a gyakorlaton igazolt állítást. $f(x) = f(x + p) = f(x + kp)$, ahol $(k \in \mathbb{Z})$
$f(1) = f(1 + 2) = f(1 + 2k) = f(1 + 2 \cdot 1009) = f(2019)$

6. a) $x \neq 0,\ \dfrac{\{x\}}{x} < 1$

Legyen $x = 0{,}5$. Ekkor $\{0{,}5\} = 0{,}5$ és $\dfrac{0{,}5}{0{,}5} = 1 \not< 1$, mivel erre nem teljesül, ezért nem igaz minden $x \neq 0$-ra az állítás. (Minden $x \in (0, 1)$ jó ellenpéldának.)

b) $x \neq 0,\ [x] = 2x$

Ilyen x van, például $x = -0{,}5$. Ekkor $[-0{,}5] = -1$ és $2x = 2 \cdot (-0{,}5) = -1$.

7. $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$

Indirekt tegyük fel, hogy **P** és nem **Q**. Ha a **Q** nem teljesül, akkor a függvény nem monoton az egész számegyenesen. Ha nem monoton nő, akkor van olyan x_0 és y_0, melyre $x_0 < y_0$ és $f(x_0) > f(y_0)$. Nézzük ezt a két függvényértéket és a **P** állítást. **P** szerint ha $f(x_0) > f(y_0)$, akkor $y_0 < x_0$, ami ellentmond az eredeti feltevéssel, hogy $x_0 < y_0$. Tehát igaz, hogy **P**-ből következik a **Q** állítás.

$\mathbf{Q} \not\Rightarrow \mathbf{P}$

Legyen $f(x) = -x$, ez monoton csökkenő az egész számegyenesen, tehát a **Q** állítás igaz rá. Meg kell mutatni minden x, y-ra, hogy ha $x < y$, akkor $f(x) \geq f(y)$.

$-x = f(x) \geq f(y) = -y$, tehát $x \leq y$, ami mindig teljesül, ha $x < y$. A **P** azonban nem teljesül, mert lehet találni ellenpéldát. Legyen $x = 1$, $y = 0$. Ekkor $f(x) = -1$ és $f(y) = 0$. Így $f(x) < f(y)$, de nem teljesül, hogy $x < y$.