Bevezető analízis 2. gyakorlat 2018/19. II. félév
3. csoport, szerda 14-16 és csütörtök 8-10

1. gyakorlat (febr. 13.)

- Állítások és tagadásuk: 1.1, 1.2, 1.11, 1.12, 1.18
- Kvantorokkal felírt állítások megfogalmazása, következtetések: 1.26-1.31, 1.38, 1.40
- Teljes indukció: 1.79, 1.80

2. gyakorlat (febr. 14.)

- Teljes indukció folytatás: 1.85-1.87
- Teljes indukció alkalmazása feladatokban: $2^n > n$, 1.94 ($2^n > n^2$), 1.90
- Példa indirekt bizonyításra, ismétlés: 1.113, 1.117
- További gondolkodtatóbb feladatok: 1.92; Legyen $a_n = 1$ és $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$. Van-e a sorozatnak 100-nál nagyobb tagja?
- **HÁZI FELADAT:** 1.47-1.50 (kvantorokkal megfogalmazandó állítások), 1.100, 1.102, 1.122 (hibakeresés), 1.19-1.21 (állítások tagadása)

3. gyakorlat (febr. 20.)

- 1.102-es és 1.122-es házi feladat megbeszélése
- teljes indukcióra példa: 1.97
- Bernoulli-egyenlőtlenség alkalmazásai: 1.335, 1.336,1.339
- Nevezetes közepek, a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazása: 1.126, 1.127

4. gyakorlat (febr. 21.)

- Nevezetes közepek folytatás: 1.127, 1.128, 1.138, 1.142, 1.73
- Példa két lépéses teljes indukcióra, a Fibonacci-sorozat: 1.104,
  igazoljuk, hogy minden n-re $u_n < c \cdot 1{,}7^n$ (fontos az $n = 1$ esetet megvizsgálni!)
- A binomiális tétel alkalmazása becslésként: 1.340
- **HÁZI FELADAT:** 1.337 (binomiális tétellel egyszerűbb, de szorgalmiként Bernoullival is beadható), 1.338; 1.104 (Fibonacci-sorozat); 1.139, 1.144, 1.131, 1.73 számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség; 1.136 (szöveges példa)

- Szorgalmi:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=?$$

5. gyakorlat (febr. 27.)

- Röpzh
- Házi feladatok megbeszélése: 1.337, 1.103, 1.139
- Rendezési axiómák: 1.149-1.153, 1.160, 1.161, 1.163, 1.165, 1.167-1.173

6. gyakorlat (febr. 28.)

- Röpzh megbeszélése: 1.138-ashoz hasonlóan
- Rendezési axiómás feladatok befejezése, ami tegnapról maradt és néhány kiegészítés a gyorsan haladóknak:
  - Igaz-e minden a, b valós számra, hogy ha $a < b$, akkor $a^3 < b^3$?
  - Igaz-e minden a, b valós számra, hogy ha $a^3 < b^3$, akkor $a < b$?
- A háromszög-egyenlőtlenség bizonyítása (esetszétválasztással, négyzetre emeléssel és a definíciót használva), majd n számra teljes indukcióval (használni kell az indukciós feltevést és azt is, hogy két számra már igazoltuk)
- Feladatok a háromszög-egyenlőtlenséghez: 1.177 (két része van, órán csak az elsőt néztük meg!), 1.178, 1.180, 1.181, 1.182
- Házi feladat: befejezni a hátramaradt feladatokat, különösen a háromszög-egyenlőtlenséghez kapcsolódóakat

7. gyakorlat (márc. 6.)

- 178-as házi feladat, a háromszög-egyenlőtlenség másik változata
- 1.186 az Arkhimédeszi axiómához kapcsolódóan
- Cantor-axióma, egymásba skatulyázott intervallumok: 1.217-1.222
- Intervallumsorozat metszete: 1.205

8. gyakorlat (márc. 7.)

- röpzh
- Cantor-axiómához folytatásként: 1.203-1.208 (intervallumsorozatok metszete), 1.223-1.227 (állítások)
- Bármely két különböző valós szám közt van irracionális szám. (visszavezetve az előadáson elhangzott bizonyításra)
- Házi feladat: 1.183, 1.240-1.242, 1.212-1.216

9. gyakorlat (márc. 13.)

- Tizedes törtek: 1.232, Mikor véges tizedes tört egy racionális szám?
- Halmazok maximuma, minimuma, alsó-, felső korlátja: 1.243, 1.246, 1.280
- Házi feladat: 1.249, 1.250, 1.255, 1.257, 1.258, 1.281
- Szorgalmi: 1.233

10. gyakorlat (márc.14.)

Konzultáció

11. gyakorlat (márc. 20.)

1. zárthelyi

12. gyakorlat (márc. 21.)

- Szuprémum, infimum (maximum, minimum, alsó és felső korlát): 1.255, 1.256, 1.257
- Házi feladat: 1.266, 1.271-276 (kvantorok), 1.266-1.269 (állítások, melyikből melyik következik)
- Túrórudiért szorgalmi: Bizonyítsd be, hogy $H \subset \mathbb{R}$ nemüres, korlátos halmaznak M maximuma, akkor $M = \sup H$.

13. gyakorlat (márc.27.)

- zh feladatainak megbeszélése
- házi feladatokból: 1.283, 1.284, 1.257
- Ha $H \subset \mathbb{R}$ nemüres, korlátos halmaznak M maximuma, akkor $M = \sup H$.
- Legynek $A, B \in \mathbb{R}$ nemüres halmazok. Ekkor $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$,
  ahol $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$
  Az egyenlőség bizonyítása két lépéses, a szuprémum definícióját felhasználva egyrészt belátjuk, hogy $\sup A + \sup B \geq \sup(A + B)$, másrészt $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$.
- Hasonlóan megbeszéltük, hogy $\max A + \max B = \max(A + B)$.

14. gyakorlat (márc. 28.)

- Halmazok szuprémuma, infimuma, maximuma, minimuma: 1.252, 1.282, 1.270, 1.264
- Legyen $H \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz. Ekkor $\sup(-H) = -\inf H$
  A bizonyítás során az $\inf H$ és a $\sup(-H)$ definícióját használtuk fel. ($\sup H$ felső korlát és az a legkisebb felső korlát, tehát minden annál kisebb valós szám nem felső korlát, azaz van annál nagyobb halmazbeli elem.)
- Házi feladat: 1.251 (Bernoulli egyenlőtlenség segít a bizonyításhoz), 1.278, 1.254, 1.261
- Szorgalmi: 1.253, illetve az 1.252 megoldása a "gyöktelenítős ötlet" felhasználása nélkül

15. gyakorlat (ápr. 3)

- röpzh
- házi feladatok megbeszélése: 2.51, 270 (teljes indukcióval a halmaz elemszámára)
- Sorozatok határértéke: 2.1, 2.2 (keressünk küszöbszámot)
- 2.3 fogalmazzuk meg az állításokat (csak az a), b) részre volt idő)

16. gyakorlat (ápr. 4.)

- Ha $H \subset \mathbb{R}$ nemüres, korlátos halmaznak m minimuma, akkor $m = \inf H$.
- 2.3-as befejezése: fogalmazzuk meg, mit jelentenek az állítások (nem biz.)
- Sorozatok határértékének bizonyítása definíció alapján. 2.52, 2.54
  - sejtsük meg a határértéket (egyszerűsítés a „legerősebb taggal")
  - írjuk fel a definíciót, minek kell teljesülnie
  - az abszolútértéket csak indoklással hagyjuk el
  - ne oldjunk meg bonyolult egyenlőtlenségeket, becsüljünk
  - írjuk mindig ki, hogy milyen feltétel mellett igaz a becslés (pl $n > 5$)
  - rendezzük úgy, hogy n-re legyen egy ε-tól függő feltétel
  - adjunk meg egy jó n_0 küszöbszámot (a megoldás során a becsléseknél használt feltételeket gyűjtsük össze, mindnek teljesülnie kell)
  - megjegyzés: nem kell a legkisebb küszöbszámot megadni, ha van egy jó, akkor kész
- Az $a_n = (-1)^n$ sorozatnak semmilyen valós szám nem határértéke. Beláttuk, hogy a konvergenciára vonatkozó egyik definíció sem teljesül.
- Házi feladat: 2.18-2.21 (állítások), órai példák befejezése (határértékek bizonyítása definíció szerint)
- Szorgalmi: 2.58

17. gyakorlat (ápr. 10.)

- röpzh
- Házi feladatok megbeszélése: 2.18-2.21
- Végtelenhez tartó sorozatok: definíció megértése, alkalmazása 2.22, 2.23
- 2.63 végtelenhez tartást definíció szerint igazolni úgy lehet, hogy mutatunk egy n_0 küszöbszámot, amelynél $\forall n > n_0$ esetén $a_n > P$ teljesül. A véges határértéknél leírtakhoz hasonlóan itt se oldjunk meg bonyolult egyenlőtlenségeket, becsüljünk, de figyeljünk a feltételekre.
- Legyen
$$P : \lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$
  ennek kapcsolata a 2.24-2.29-es feladatbeli állításokkal. Az oszcillálva divergens nem jelenti azt, hogy a sorozat két érték közt ugrál, erre néztünk többféle példát is, ahol nem létezik a határérték. Ha valami nem tart valahová, akkor két lehetőség van: megmutatjuk, hogy a definíció nem teljesül, vagy megmutatjuk, hogy hova tart és hivatkozunk a határérték egyértelműségét kimondó tételre.

18. gyakorlat (ápr. 11.)

- 2.46 Egy ilyen sorozat csak a 3-hoz tarthat vagy nincs határértéke. $\pm\infty$ nem lehet a határérték, $P = 3$-ra kell megnézni a definíciót és nem teljesül. Megmutattuk a definíció alapján, hogy 3-hoz tart, majd beláttuk semmilyen $b \neq 3$ valós nem lehet határértéke ($\varepsilon = \frac{|b-3|}{2}$ esetén a definíció nem fog teljesülni. Emlékezzünk a rajzra.)
- 2.63 Többféle ötlettel. Az első n természetes szám összegére van zárt képlet, vagy lehet becsléssel csinálni. (Ez utóbbit csak vázlatosan mutattam meg, $n > 2$ esetén az első $\frac{n}{2}$ tagot a számlálóban alulról becsüljük 1-gyel, míg a nagyobb tagokat $\frac{n}{2}$-vel. Ekkor $a_n > \frac{\frac{n}{2}1+\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}}{n} = \frac{n}{4}$.)
- 2.72 A becsléshez először teljes indukcióval beláttuk, hogy $n! > n^2$, ha $4 \leq n$. (Itt az indukciós lépések során tett feltételeket is figyelembe kell venni, hogy honnantól tudunk az indukcióval „lépegetni".) Ennek segítségével $n! - n > n^2 - n > 2n - n = n$. Elég tehát $n > P$ teljesülését biztosítani, de a jó küszöb megadásához a becslések során tett feltételeket is figyelembe kell venni, mert mindnek teljesülni kell.
- Házi feladat: 2.30–2.36, 2.44, 2.45, 2.47, 2.77
- Órai feladatok közül maradt: 2.99, 2.101 $(-1)^n$ $\pm\infty$-hez sem tart, definíció alapján nem nehéz belátni, hogy nem teljesül.
- Szorgalmi: 2.64

19. gyakorlat (ápr. 24.)

- (utolsó) röpzh
- Házi feladatokból 2.44 (3-nál nagyobb valós számhoz, illetve plusz végtelenhez nem tarthat, minden más eset lehetséges), 2.45 (3-nál kisebb valós számhoz, illetve mínusz végtelenhez nem tarthat, minden más eset lehetséges)
- Határérték és műveletek: közösen megnéztük az összeadásra és a szorzásra vonatkozó táblázatot. Innentől ezekre zh-ban is lehet hivatkozni, de mindig meg kell mondani, hogy melyik sorozat az (a_n), melyik sorozat a (b_n) és melyik táblázatot használjuk.
  Kritikus limesz a $\infty - \infty$, erre néztünk példákat, illetve a $0 \cdot \infty$ alakú, erre is néztünk példát, hogy mind a négyféle eset lehetséges.
- Mi lehet $\lim \dfrac{a_n}{b_n}$, ha $\lim a_n = \lim b_n = \infty$?

$$\begin{array}{lll}
\infty & a_n = n^2 & b_n = n \\
A \in \mathbb{R}^+ & a_n = An & b_n = n \\
\text{oszc. div.} & a_n = \begin{cases} n, & \text{ha n páros} \\ n^2, & \text{ha n páratlan} \end{cases} & b_n = \begin{cases} n^2, & \text{ha n páros} \\ n, & \text{ha n páratlan} \end{cases}
\end{array}$$

  negatív valós számhoz és mínusz végtelenhez nem tarthat ($P = 0$-ra alkalmazzuk a definíciót)
  Megjegyzés: az oszcillálva divergensre van nem kapcsosjeles sorozat is példaként.

20. gyakorlat (ápr. 25.)

- Mi lehet $\lim \frac{1}{a_n}$, ha $\lim a_n = 0$?
  - ∞, ha $a_n = \frac{1}{n}$
  - $-\infty$, ha $a_n = \frac{-1}{n}$

– oszc. div., ha $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

– nullához nem tarthat, ezt definíció alapján beláttuk

- határérték és műveletek alkalmazása feladatokban: 2.104 (egyszerűsítés a legerősebb taggal), 2.114 (bővítés a „fáradékony bolha” ötlet alapján), 2.122 (kiemeléssel), 2.102, 2.106

- A műveleteknél a táblázatra hivatkozunk, de az egyes sorozatok határértékét külön be kell látni akár az ε-os definícióval, akár a rendőr-elv segítségével. Ehhez segítségként a $\lim n^k$-t megnéztük pozitív k-ra, a $k < 0$ eset házi feladat, ehhez nagyon hasonlóan megy.

- Logikai feladatok: 2.137, 2.138 (egyik állításból sem következik a másik! Ha nem használhatnánk a táblázatot, akkor definíció alapján beláttuk, hogy két végtelenhez tartó sorozat összege is a végtelenhez tart.), 2.160 Fontos, hogy a táblázat csak az egyik irányban segít, arról nincs szó, hogy ha két sorozat összegének adott a határértéke, akkor mi lehet az egyes sorozatok határértéke külön-külön!
Az $a_n \begin{cases} n, \text{ha n páros} \\ 0, \text{ ha n páratlan} \end{cases}$ sorozat nem tart a végtelenbe, pl $P = 1$-re a definíció nem teljesül, végtelen sok tagja van a (P, ∞) intervallumon kívül.

- Házi feladat: 2.146 (kritikus határértékre példa), 2.139, 2.156, 2.157 (logikai állítások), 2.110, 2.113, 2.115, 2.121 (határérték és műveletek)

- Szorgalmi: 2.131, múlt órai oszc. div. sorozatra zárt alakú példasorozat megadása

21. gyakorlat (máj. 2.)

- Házi feladat megbeszélése: 2.146: a hányados határértéke lehet 0, $A \in \mathbb{R}$, $\pm\infty$ és lehet oszcillálva divergens is.
2.156: (a_n) lehet konvergens, tarthat $\pm\infty$-be és oszcillálva divergensre is van példa.

- Nagyságrendek: $n^k \prec a^n \prec n! \prec n^n$, ahol $n \to \infty, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}, a > 1$.

- 2.195. Határérték megsejtése a nagyságrend alapján. A rendőr-elv alkalmazása, alulról és felülről is egy $\frac{2}{3}$-hoz tartó sorozattal becsültük egy küszöbtől kezdve. A becsléshez a nagyságrendeket használtuk.

- Nevezetes határértékek: $a > 0, a \in \mathbb{R}$, akkor $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$, illetve $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$
Ehhez kapcsolódó példák: 2.164-167.
Vigyázat: abból, hogy $a_n \longrightarrow 0$ nem következik, hogy $\sqrt[n]{a_n} \longleftrightarrow 0$! (Pl: $a_n = \frac{1}{n}$.)

- AZ egy külön tétel, hogy ha $a_n \longleftrightarrow 1$, akkor $\sqrt[n]{a_n} \longleftrightarrow 1$. Ezt be is láttuk indirekt módon, hogy utána akár a 2.195-ös példa másik megoldásánál, akár más kiemeléses feladatnál használni lehessen.

- nagyságrendekhez kapcsolódó feladatok: 2.232, 2.237, 2.244

- Házi feladat: 2.190, 2.196 (rendőr-elv), 2.173-176 ($\sqrt[n]{a_n}$-es feladatok), 2.239, 2.242 (nagyságrendek)

22. gyakorlat (máj. 8.)

- Házi feladatból 2.176. $\sqrt[n]{a_n} \to 1$, mi lehet a_n határértéke?

  – 1, ha $a_n = A$, ahol $A \in \mathbf{R}$

  – 0, ha $a_n = \frac{1}{n}$

  – ∞, ha $a_n = n$

- Nagyságrendek: 2.256: $a_n = 3^n - n \cdot 2^n$
  Emeljünk ki 2^n-t: $a_n = 2^n \left(\frac{3^n}{2^n} - n\right)$
  Így a zárójeles kifejezés még mindig kritikus, $\infty - \infty$ alakú limesz, tovább kell alakítani.
  $\frac{3^n}{2^n} \succ n$, tehát egy küszöbtől $\left(\frac{3^n}{2^n} - n\right) > 0$ (A nagyságrend miatt n-et felülről lehet becsülni $\frac{1}{2} \cdot \frac{3^n}{2^n}$-vel, innentől a zárójeles kifejezésről már könnyen látszik, hogy a végtelenhez tart.)
  A határérték és a szorzás táblázatot a két végtelenhez tartó sorozatra alkalmazva az eredeti a_n sorozat is a végtelenbe tart.
  Megjegyzés: 3^n-t is ki lehet emelni, ekkor az $\left(1 - \frac{n \cdot 2^n}{3^n}\right)$-ről kell belátni, hogy 1-hez tart. A tört nagyságrend miatt 0-hoz tart, innentől pedig az előbbihez hasonlóan a határérték és műveletekről szóló tételt kell alkalmazni.

- 2.260.: $\frac{n! - 3^n}{n^{10} - 2^n}$
  Első ötlet, hogy a „legerősebb” taggal egyszerűsítünk (azaz leosztjuk a számlálót és a nevezőt is), nem vezet most célra, mert $\frac{0}{0}$ alakú limesz lesz, ami szintén kritikus. Úgy célszerű tehát egyszerűsíteni, hogy a nevező ne tartson 0-hoz, tehát a **nevező legerősebb tagjával egyszerűsítsünk**.
  Ekkor $a_n = \dfrac{\frac{n!}{2^n} - \frac{3^n}{2^n}}{\frac{n^{10}}{2^n} - 1}$. A nevező ekkor már jó, hiszen (-1)-hez tart, a számláló azonban megint kritikus, mert $\infty - \infty$ alakú.
  Nézzük most csak a számlálót! $\frac{n!}{2^n} > \frac{3^n}{2^n}$, mert $\frac{3^n}{2^n}$ felülről becsülhető $\frac{1}{2} \cdot \frac{n!}{2^n}$-nel. Ez a becslés a nagyságrendek miatt teljesül, ugyanis egyszerűsítés és rendezés után $\frac{n!}{3^n} > 2$. Mivel $n! \succ a^n$, ezért $\frac{n!}{3^n}$ tart a végtelenbe, tehát egy küszöbtől fogva 2-nél is nagyobb. Így tehát a nagyságrendek miatt a számláló ∞-hez tart, a tört értéke pedig a határérték és műveletek alapján $-\infty$-hez.

- Részsorozatok (Fontos, hogy a részsorozat is végtelen sorozat!) A részsorozatok konvergenciájáról szóló tételt alkalmaztuk a 2.224-es és 2.225-ös feladatok megoldásában. A Q állításból a P nem következett, tehát abból, hogy a páros és a páratlan indexű tagokból álló részsorozatok konvergensek, még nem következik, hogy a_n is konvergens. Erre jó példa $a_n \begin{cases} 5, \text{ha n páros} \\ 0, \text{ ha n páratlan} \end{cases}$.
  Ahhoz, hogy ennek nincs határértéke, azt kell megmutatni, hogy sem $\pm\infty$-hez, sem $A \in \mathbb{R}$ valós számhoz nem tart, mindannyiszor a definíciót vettük elő és mutattuk meg, hogy nem teljesül. (pl $P = 6$ esetén a $+\infty$-hez tartás, $P = -2$ esetén a $-\infty$-hez tartás definíciója nem teljesül. A valós határérték nemlétezéséhez $\varepsilon = 1$ jó példa, hiszen ilyenkor az $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 2 hosszú intervallum, ami a 0 és az 5 közül csak az egyiket tartalmazza, tehát ezen az intervallumon kívül a sorozatnak végtelen sok tajga van.)
  További példák 2.86 (oszcillálva divergens), 2.87 (tart a ∞-be, ehhez küszöböt is adtunk, mindkét részsorozat legyen nagyobb P-nél.)

- Monoton sorozatok 2.198, 2.199. itt lényegében csak felírtam, megmutattam példákon, hogy nagyon furcsa viselkedése is lehet két monoton sorozat összegének és szorzatának. Ahhoz, hogy egy sorozat ne legyen monoton, elég az első néhány tagot „elrontani”, hiszen a definíció minden n-re szól.
  pl: Két monoton növő sorozat összege nem monoton. $a_n = \begin{cases} 5, \text{ha n páros} \\ n+1, \text{ ha n páratlan} \end{cases}$ és $b_n = n$.
  Ekkor $a_n + b_n = \begin{cases} 0, \text{ ha n páros} \\ 1, \text{ ha n páratlan} \end{cases}$.
  Két monoton növő/csökkenő sorozat összege is monoton növő/csökkenő, ezt a definíciót jelentő egyenlőtlenségek összeadásával meg is mutattuk.

Szorzásnál az előjelekre nagyon kell figyelni!
Két monoton sorozat szorzata nem feltétlen monoton, legyen például $a_n = n$, $b_n = n - 2$. Ekkor $a_n \cdot b_n = n(n-2) = n^2 - n$. Ennek első néhány n-re a tagjai rendre: $0, -1, 0, 3 \ldots$, tehát nem monoton.

- ZH anyaga: az előző ZH utántól minden, sup, inf, valós és végtelen határérték, rendőr-elv, nagyságrendek, részsorozatok, monoton sorozatok.